12/5/17 Μάθημα 17ο

Επικαμπύλια ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων

Ορισμός: Έστω $\bar{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$: C^1, $\bar{f}:\bar{\gamma}([a,b])\to\mathbb{R}^n$ C. Τότε $\int_{\bar{\gamma}}\bar{f}\,d\bar{x}=\int_a^b \bar{f}(\bar{\gamma}(t))\bar{\gamma}'(t)\,dt$

επικαμπύλιο ολοκλ. του διαν. πεδίου $\bar{f}$ κατά μήκος της $\bar{\gamma}$.

π.χ. $\bar{\gamma}(t)=(r\cos t, r\sin t)$, $t\in[a,b]$, $r>0$

$\bar{f}(x,y)=(-y,x)$ και $\bar{g}(x,y)=(x,y)$

$$\Rightarrow \int_{\bar{\gamma}}\bar{f}\,d(x,y)=\int_a^b \underbrace{\bar{f}(r\cos t, r\sin t)}_{=(-r\sin t,\, r\cos t)}\cdot(-r\sin t, r\cos t)\,dt$$

$$=\int_a^b (r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t)\,dt$$

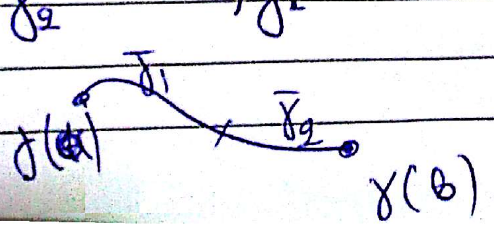
$$=r^2(b-a)$$

$$\Rightarrow \int_{\bar{\gamma}}\bar{g}\cdot d(x,y)=\int_a^b \underbrace{(r\cos t, r\sin t)\cdot(-r\sin t, r\cos t)}_{=0}\,dt$$

Πρόταση (ιδιότητες)

α) $\int_{\bar{\gamma}}(\lambda\bar{f}+\mu\bar{g})\cdot d\bar{x}=\lambda\int_{\bar{\gamma}}\bar{f}\cdot d\bar{x}+\mu\int_{\bar{\gamma}}\bar{g}\cdot d\bar{x}$

β) $\int_{\gamma_1\oplus\gamma_2}\bar{f}\cdot d\bar{x}=\int_{\bar{\gamma}_1}\bar{f}\cdot d\bar{x}+\int_{\bar{\gamma}_2}\bar{f}\,d\bar{x}$



γ) $\left|\int_{\bar\gamma} \bar f \cdot d\bar x\right| \leq \int_a^b \underbrace{|\bar f(\bar\gamma(t)) \cdot \bar\gamma'(t)|}\, dt$

$\leq \underbrace{\|\bar f(\bar\gamma(t))\|}\, \|\bar\gamma'(t)\|$

$\leq \max_{t\in[a,b]} \|\bar f(\bar\gamma(t))\| = \|\bar f\|_0$

Άρα $\left|\int_{\bar\gamma} \bar f \cdot d\bar x\right| \leq \|\bar f\|_0 \, L(\bar\gamma)$

Πρόταση (SOS): Έστω $\bar\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1 και $\bar f : \bar\gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ συνεχής τότε $\Rightarrow$

$$\int_{\bar\gamma^-} \bar f \cdot d\bar x = -\int_{\bar\gamma} \bar f \cdot d\bar x$$

απόδειξη: $\bar\gamma^-(t) := \bar\gamma(a+b-t)$, $t\in[a,b]$

$\Rightarrow (\bar\gamma^-)'(t) = \bar\gamma'(a+b-t)(-1)$, $t\in[a,b]$

$\Rightarrow \int_{\bar\gamma^-} \bar f \cdot d\bar x \overset{\text{ορ.}}{=} \int_a^b \bar f(\bar\gamma^-(t)) \cdot \bar\gamma'(t)\, dt =$

$= -\int_a^b \bar f(\bar\gamma(\underbrace{a+b-t}_{\tau})) \cdot \bar\gamma'(\underbrace{a+b-t}_{\tau})\, dt$

$= -\int_a^b \bar f(\bar\gamma(\tau)) \cdot \bar\gamma'(\tau)\, d\tau$

$= -\int_{\bar\gamma} \bar f \cdot d\bar x$.

Πρόταση (SOS): Έστω $\bar\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1, $\bar f : \bar\gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ C και $\phi : [A,B] \to [a,b]$ είναι C^1 π.μ. που διατηρεί τον προσανατολισμό ($\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \phi'(\tau) > 0$)

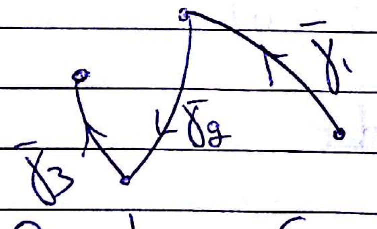
$$\Rightarrow \int_{\bar\gamma\circ\phi} \bar f \, d\bar x = \int_{\bar\gamma} \bar f \, d\bar x$$

απόδειξη: $\int_{\bar\gamma\circ\phi} \bar f \cdot d\bar x \overset{\text{ορ.}}{=} \int_B^A \bar f\big(\underbrace{(\bar\gamma\circ\phi)(\tau)}_{\overset{\text{ορ.}}{=}\bar\gamma(\phi(\tau))}\big)\cdot \underbrace{(\bar\gamma\circ\phi)'(\tau)}_{\overset{\text{κ.α.}}{=}\bar\gamma'(\phi(\tau))\,\phi'(\tau)} d\tau$

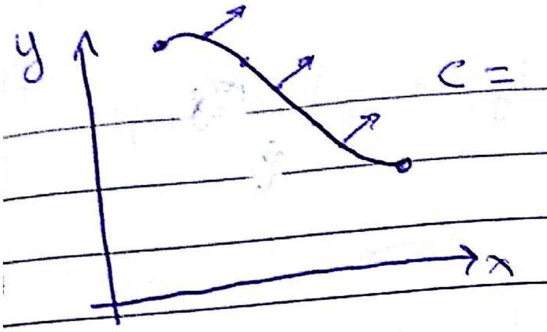
$\phi(\tau) = t$, $\quad \phi'(\tau) > 0$

$$\overset{\text{ΚΑΜ}}{=} \int_a^b \bar f(\bar\gamma(t))\cdot\bar\gamma'(t)\,dt \overset{\text{ορ.}}{=} \int_{\bar\gamma} \bar f\cdot d\bar x. \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση: «Ε, αφού είναι έτσι...» Μπορούμε να ζητάμε ολοκληρώματα διαν. πεδίων κατά μήκος καμπυλών $C\subseteq\mathbb{R}^n$ (δηλ. μόνο γνωρίζοντας την «εικόνα» στο $\mathbb{R}^n$) αν μας έχουν πει ποιος είναι ο προσανατολισμός, χωρίς να γνωρίζουμε την κάποια παραμετρικοποίηση της C, υποθέτοντας ότι η $\bar\gamma$ θα είναι απλή ή απλή κλειστή καμπύλη.



Ορισμός: Έστω $\bar\gamma = \bar\gamma_1 \oplus \dots \oplus \bar\gamma_k : [a,b]\to\mathbb{R}^n$ και κατά τμήματα C^1 καμπύλη και $\bar f : \bar\gamma([a,b])\to\mathbb{R}^n$ συνεχής. Ορίζουμε
$$\int_{\bar\gamma} \bar f\cdot d\bar x = \sum_{i=1}^{k} \int_{\bar\gamma_i} \bar f\cdot d\bar x$$



$C = \gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$ $\quad f: U \to \mathbb{R},\ U \subset \mathbb{R}^n$

$f: U \to \mathbb{R}^n,\ U \subset \mathbb{R}^n$

π.χ. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

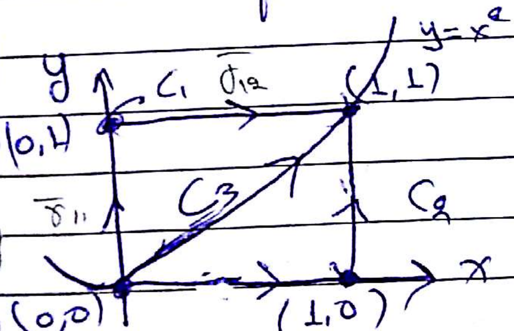
$$I_i = \int_{C_i} (y, x-y) \cdot d(x,y),$$

$$J_i = \int_{C_i} (y, y-x) \cdot d(x,y), \quad i=1,2,3.$$

όπου (α) C_1 η πολυγωνική γραμμή που ενώνει κατά σειρά τα $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$,

(β) C_2 —//— τα $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$

(γ) C_3 —//— το τμήμα της παραβολής $y=x^2$ από το σημείο $(0,0)$ στο (προς το) σημείο $(1,1)$.



$\bar\gamma_i(t) = \bar a_{i-1} + t(\bar a_i - \bar a_{i-1})$

$\bar\gamma_{11}(t) = (0,0) + t((0,1)-(0,0)) =$
$= (0,0) + t(0,1) = (0,t)$

$\bar\gamma_{12} = (0,1) + t((1,1)-(0,1)) = (0,1) + (t,0)$
$= (t,1)$

$\gamma_1 = \bar\gamma_{11} \oplus \bar\gamma_{12}$, $\quad \bar\gamma_{11}(t) = (0,t)$, $t \in [0,1]$
$\quad \bar\gamma_{12}(t) = (t,1)$, $t \in [0,1]$

$C_1 = \gamma_1([a_1,b_1])$.

$\gamma_2 = \bar\gamma_{21} \oplus \bar\gamma_{22}$, $\quad \bar\gamma_{21}(t) = (t,0)$, $t \in [0,1]$
$\quad \bar\gamma_{22}(t) = (1,t)$, $t \in [0,1]$

$$C_3 = \{\underbrace{(x, f(x))}_{\in \mathbb{R}^2} : x \in [0,1]\}$$

$\bar\gamma_3(x) = (x, f(x)) = (x, x^2)$

$C_3 = \gamma_3([0,1])$ άρα $\gamma_3(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$

$$I_1 = \int_{\bar\gamma_{11}} (y, x-y)\cdot d(x,y) + \int_{\bar\gamma_{12}} (y, x-y)\cdot d(x,y) = (*)$$

$$= \int_0^1 \underbrace{(t,-t)\cdot(0,1)}_{=-t}\,dt = -\frac{1}{2} \qquad = \int_0^1 \underbrace{(1,t-1)\cdot(1,0)}_{=1}\,dt = 1$$

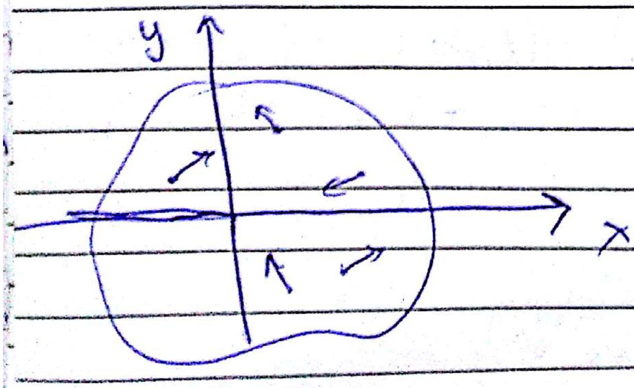
άρα $(*) = \frac{1}{2}$.

Αντίστοιχα: $I_2 = \frac{1}{2}$, $I_3 = \int_0^1 (t^2, t-t^2)\cdot(1,2t)\,dt = \frac{1}{2}$.

Αλλά $J_1 = \int_{C_1} (y, y-x)\,d(x,y) = \dots = \frac{3}{2}$

$J_2 = -\frac{3}{2}$, $J_3 = \frac{1}{6}$.

Ορισμός (SOS-ΑρΑ): $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, το διανυσματικό πεδίο $\bar f : U \to \mathbb{R}^n$ λέγεται πεδίο κλίσεων, αν υπάρχει μια συνάρτηση (πραγματική βαθμωτή): $\phi : U \to \mathbb{R}$: $\nabla\phi(\bar x) = \bar f(\bar x)$ $\forall \bar x \in U$.



$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\right)(\bar x)$$

Θα λέμε ότι η ϕ είναι το δυναμικό του $\bar f$.

1. $f(x,y) = (y, x-y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
Είναι η f πεδίο κλίσεως?
$\Leftrightarrow \exists \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\nabla \phi(x,y) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y), \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) \right)$
$= (y, x-y)$?

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = y}_{} \quad \wedge \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x-y$$

$$\Rightarrow \phi(x,y) = \int y \, dx + c(y) \quad \nabla$$

$$= yx + c(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + c'(y) \stackrel{!}{=} x - y \Leftrightarrow c'(y) = -y$$

$$\Leftrightarrow c(y) = -\frac{y^2}{2} + c$$

$$\phi(x,y) = yx - \frac{y^2}{2} + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

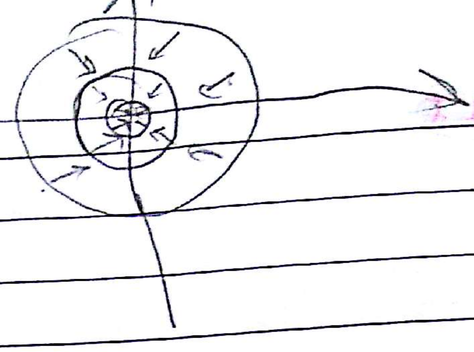
επαλήθευση

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = y \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = x-y$$

παράδειγμα
Βαρυτικό πεδίο (δυνάμεως)

$$f(\bar{x}) = -Gm \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|^3} \quad , \bar{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\bar{0}\} \quad , \quad G, m > 0$$

(η δύναμη βαρύτητας που ασκείται σε ένα σώμα μάζας = 1 η οποία βρίσκεται στο σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\bar{0}\}$ από ένα σημείο μάζας m, το οποίο βρίσκεται στο $\bar{0}$)



[Μη σταθερή βαρύτητα]

$$\|\bar f(\bar x)\| = Gm \frac{1}{\|\bar x\|^2}$$

(Δεύτερος νόμος Newton)

Το βαρυτικό πεδίο αυτό ήταν πεδίο κλίσεων

$\bar f(\bar x) = \nabla \phi(\bar x)$ όπου $\phi(\bar x) = \dfrac{Gm}{\|\bar x\|}$, $\bar x \neq 0$

$$\bar f(x,y,z) = -\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3} \overset{?}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z), \frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z) = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\int x(x^2-a)^{-3/2}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2-a)'(x^2-a)^{-3/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-a)^{-3/2+1}}{-3/2+1} = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-a)^{-1/2}}{-1/2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2-a}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{\|(x,y,z)\|}$$

$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|} + c(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\|(x,y,z)\|}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(c(y,z)\right)$$

$$= \frac{-y}{\|(x,y,z)\|^3} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(c(y,z)\right)}_{=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(y,z) = \tilde{c}(z) \;!$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right)' = \left((x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right)' = \right.$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,\cancel{2}y = \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\left. = \frac{-y}{\|(x,y,z)\|^3} \right\}$$

Αρα $\phi(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|} + \tilde{c}(z)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{z}{\|(x,y,z)\|^3} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{c}(z)\right)}_{=0}$$

$$\tilde{c}(z) = c \in \mathbb{R}$$

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|}$$